

В. А. ГНЕВАШЕВА

**Прогнозирование  
занятости  
с помощью функции  
Кобба–Дугласа**

Попытки описать занятость в зависимости от производственных показателей и оценить ее предпринимались уже давно. Рассматривая спрос на труд как отдельный элемент экономики, описываемый функционально, ученые стали использовать понятие *функции спроса на занятость (employment demand function)*<sup>1</sup>.

В большинстве своем все подобные модели сводятся в той или иной мере к описанию функции, обратной известной производственной функции (инверсии)<sup>2</sup>. При этом спрос на труд описывается как зависящий от выпуска продукции, внутренних производственных факторов и уровня капиталоемкости производства. В рассматриваемой модели удельные затраты на труд являются фиксированными, в том числе и их производные, влияющие на оптимальный выбор для предприятия между количеством рабочих и количеством часов их занятости.

Прежде чем рассматривать данную модель, следует отметить ее отличие от неоклассической модели спроса на труд. В неоклассической модели фокусным моментом является взаимосвязь заработной платы с количеством нанимаемых работников, при оптимизации данной зависимости находится точка максимальной выгоды предприятия, которая и определяет общий уровень занятости на рассматриваемом производственном объекте. В данном случае объем выпускаемой продукции является производной величиной от объема занятости на про-

изводстве, а соответственно, от затрат труда при производстве продукции.

Использование инверсионной производственной функции при оценке спроса позволяет посмотреть на данную ситуацию с другой стороны.

Неоклассическая теория утверждает, что в краткосрочном периоде, когда капитал предприятия фиксирован, уровень занятости на предприятии выбирается исходя из предположения максимизации дохода (согласно правилу равенства заработной платы предельному продукту труда в стоимостном выражении  $W=MRP$ ). Рассматривая производственную функцию в кратковременном периоде, исходим из предположения о равенстве предельных затрат предельной вырубке ( $MC=MR$ ).

В противоположность рассмотренному подходу функция спроса на занятость в упрощенной форме фокусируется на обратном влиянии изменения объема выпуска на уровень занятости на производстве.

Инверсионная функция определения спроса на занятость, основанная на обратной зависимости количества работников от выпуска, может быть использована для прогнозирования уровня занятости на предприятии (в отрасли) при заданном (планируемом) объеме выпуска на будущие периоды.

**ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ**

Функция определения уровня занятости выводится как обратная производственной функции, заданной в краткосрочном перио-

<sup>1</sup> См.: Berndt E. R. Modelling the Simultaneous Demand for Factors of Production // Grice Hornstein J., Webb A. (eds). The Economics of the Labour Market. London: HMSO, 1981. P. 125–142; Hazledine T. Employment Functions and the Demand for Labor in the Short-Run // Idem. P. 177–181.

<sup>2</sup> См.: Sapsford D., Tzannatos Z. The Economics of the Labor Market. London: The Macmillan Press LTD, 1993.

де. При этом  $Q$  — объем выпуска продукции,  $L$  — уровень занятости на предприятии (рассматриваемом производственном объекте),  $K$  — объем используемого капитала.

В самом общем виде производственная функция выглядит следующим образом:

$$Q = Q(L, K) \quad (1)$$

В краткосрочном периоде капитал предприятия полагается фиксированным, в результате чего функцию можно записать как:

$$Q = Q(L) = f(L) \quad (2)$$

Выразим в функции (2) уровень занятости ( $L$ ) через объем выпуска ( $Q$ ) и получим (предполагая существование обратной функции):

$$L = L(Q) \quad (3)$$

Данная зависимость позволяет рассчитывать желаемый уровень занятости ( $L$ ) как функцию, зависящую от объема выпуска ( $Q$ ). Важно заметить, что выражение (3) описывает функцию занятости в краткосрочном периоде с соответствующей (заданной) взаимосвязью между входящими ресурсами и получаемым объемом выпуска (т. е. с заданной технологией производства). В данной упрощенной модели не учитываются индивидуальные приоритеты предприятия в области политики занятости иначе, чем в смысле максимизации объема выпуска продукции. Максимальный объем получается при максимизации соответствующего критерия. При этом тот или иной вид функции даст соответствующий максимальному выпуску уровень занятости. Данная упрощенная модель не представляет возможности рассматривать распределение мощностей по технологиям.

Рассмотрение более сложной модели исходя из возможных начальных предпосылок — минимизации издержек либо максимизации прибыли — дает более наглядное описание ситуации, позволяющее при этом учитывать роль цены труда, для определения оптимального уровня количества работников на предприятии.

Для дальнейшей иллюстрации представим, что выпуск в момент времени  $t$  определен в соответствии с производственной функцией Кобба–Дугласа.

$$Q_t = A * L_t^\alpha * K_t^\beta * e^{\theta * t} \quad (4)$$

где  $t$  — время,  $A, \alpha, \beta, \theta > 0$  (Const).

Введенные коэффициенты в степенях позволяют оценить вклад каждого фактора, в том числе технического прогресса, в процесс производства. В результате НТП то же количество используемого в производстве капитала дает все большую отдачу, т. е. можно сказать, что совершенствование технологии заложено в форме производственной функции. Такая форма модели отражает ситуацию в динамике, а, соответственно, эту модель можно использовать для долгосрочного прогнозирования.

Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей функции (4), тогда получим следующую зависимость:

$$\ln Q_t = a + \alpha \ln L_t + \beta \ln K_t + \theta t \quad (5)$$

где  $a = \ln A$ .

Выразив из зависимости (5) уровень занятости  $L$  через объем выпуска, получим выражение:

$$\ln L_t^* = a_0 + a_1 \ln Q_t + a_2 \ln K_t + a_3 t \quad (6)$$

Уравнение (6) отражает линейную зависимость уровня занятости на предприятии ( $L$ ) от объема производства ( $Q$ ), капитала ( $K$ ) с учетом временного тренда ( $t$ ).

Таким образом, переводя основные элементы производственной функции — труд ( $L$ ), объем производства ( $Q$ ) и капитал ( $K$ ) в сопоставимые величины с учетом времени ( $t$ ), можно свести модель производственной функции к линейной зависимости. Логарифмируя функцию, мы получаем зависимость не объемов, а их приростных изменений. При этом учитываем коэффициенты при показателях в формуле (6):

$$a_0 = -\frac{a}{\alpha}; a_1 = \frac{1}{\alpha}; a_2 = -\frac{\beta}{\alpha}; a_3 = -\frac{\theta}{\alpha}$$

$$a_0 < 0, a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 < 0.$$

В соответствии с функцией (6) уровень занятости ( $L_t$ ) должен положительно зависеть от объема выпуска и, наоборот, отрицательно зависеть от вложения капитальных

ресурсов в производство (от временного тренда).

Для более адекватного отражения действительности введем дополнительный фактор ( $W_t$ ): отношение заработной платы отдельной отрасли к средней по рассматриваемому сектору экономики, подставим данный показатель в исходную модель. При этом модель станет трехфакторной и примет вид:

$$\ln L_t^* = a_0 + a_1 \ln Q_t + a_2 \ln K_t + a_3 \ln W_t + a_4 t \quad (7)$$

Коэффициенты при факторных показателях могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, что показывает характер взаимовлияния факторов.

Введение показателя отношения заработной платы отдельной отрасли (предприятия) к средней по экономике позволяет учесть предпочтения работников относительно их трудоустройства в той или иной сфере, так как это отношение может влиять на выбор работниками места работы и специальности.

Уровень занятости теоретически положительно зависит от объема выпуска (эффект масштаба).

Показатели трудоемкости и капиталоемкости продукции также положительно зависят друг от друга, если труд и капитал комплементарны (и при росте выпуска действует только эффект масштаба); если же труд и капитал являются субститутами, то зависимость между трудоемкостью и капиталоемкостью продукции является отрицательной, поскольку удешевление капитала, к примеру, приводит к замене им труда (эффект замещения).

Что касается показателя уровня заработной платы на предприятиях, то здесь ситуация не так очевидна. Ясно, что чем дешевле работники, тем больше их в принципе можно нанять. Однако на практике мы часто наблюдаем именно в растущих отраслях одновременно с ростом занятости и рост заработной платы — здесь нет противоречия, просто работников соответствующей профессии и квалификации физически не хватает

и при фиксированном предложении труда рост спроса ведет одновременно к росту заработной платы.

Вклад капитальных ресурсов в производство, таких как, например, результаты НТП, может быть учтен с помощью временного тренда. Оценка непосредственно показателя объема применяемого капитала на предприятии ( $K$ ) в реальных условиях очень затруднена; поскольку в физическом отношении данный показатель включает в себя достаточно большой и разнообразный спектр капитальных ресурсов: и машины, и оборудование, и здания, и сооружения, и доменные печи, и конвейеры и т. д.; в стоимостном отношении оценка показателя также затруднена ввиду различных сроков приобретения капитальных ресурсов, различных амортизационных отчислений, постоянно изменяющегося уровня инфляции. Поэтому в моделях для оценки влияния капитала используют другой подход.

Перемена структуры производства — процесс, растянутый во времени. Возьмем показатель времени ( $t$ ) как обобщенное влияние показателя капитала ( $K$ ) на общий итог производства. Тогда двухфакторная модель без учета показателя отношения заработной платы отдельной отрасли к средней по рассматриваемому сектору экономики ( $W_t$ ) примет вид:

$$\ln L_t = a_0 + a_1 \ln Q_t + a_2 t \quad (8)$$

Трехфакторная модель с учетом дополнительного фактора отношения заработной платы отрасли к средней по рассматриваемому сектору экономики ( $W_t$ ):

$$L_t = a_0 + a_1 \ln Q_t + a_2 \ln W_t + a_3 t \quad (9)$$

Этот подход часто используют при моделировании, так как влияние капитала с годами растет и его направленность совпадает с влиянием временного тренда.

При этом под  $L$  можно понимать как общее количество часов, затраченное на выпуск продукции, так и количество занятых в производстве.

ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ  
МОДЕЛИ

Предложенную модель можно применить на практике для анализа зависимости уровня занятости от объема выпуска на основе данных по отраслям российской промышленности за период 1995–2000 гг.<sup>1</sup>

Мы должны убедиться, что при оценке регрессионных уравнений методом наименьших квадратов по 10 отраслям промышленности полученные уравнения характеризуются высоким уровнем  $R^2$  и значимыми коэффициентами при объясняющих переменных с доверительной вероятностью 95%.

Проведенные расчеты показывают, что в большей части отраслей значение рассматриваемого коэффициента  $R^2$  не опускается ниже отметки 0,947, однако есть отрасли, такие как, например, черная металлургия, цветная металлургия, где значение коэффициента существенно ниже, но находится в пределах возможности рассмотрения данных отраслей с точки зрения проведения расчетов по показателям, используемым в модели.

Оценив надежность коэффициентов при основных показателях модели с помощью статистики, необходимо рассмотреть более подробно возможный характер поведения еще одного показателя модели, а именно отношения заработной платы отдельной отрасли к средней по экономике.

Изменение в ходе реформ последних лет тех ценовых пропорций, что сложились в экономике социализма, по сути дела является причиной того, что на сегодняшний день колебания в уровне оплаты труда существенны от отрасли к отрасли.

Из *таблицы 1* видно, что есть отрасли, где уровень заработной платы намного выше среднего по промышленности, к таким отраслям следует отнести электроэнергетику, топливную промышленность, цветную металлургию, отчасти черную металлургию. Другие же, как, например, отрасль легкой промышленности, стройматериалов, машиностроения, отличаются низкой заработной платой сотрудников по сравнению со средней заработной платой по промышленности.

Таблица 1

ОТНОШЕНИЕ НАЧИСЛЕННОЙ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ ПО ОТРАСЛЯМ  
К СРЕДНЕЙ ПО ПРОМЫШЛЕННОСТИ\*

Год	Электроэнергетика	Топливная	Черная металлургия	Цветная металлургия	Химическая	Машиностроение	Лесная	Промышленность стройматериалов	Легкая	Пищевая
1995	1,86	2,29	1,22	2,00	0,96	0,76	0,85	0,99	0,50	1,05
1996	1,85	2,20	1,33	1,88	0,96	0,75	0,79	0,94	0,45	1,06
1997	1,78	2,20	1,25	1,81	0,98	0,77	0,76	0,92	0,46	1,03
1998	1,77	2,07	1,19	1,91	1,01	0,77	0,73	0,88	0,45	1,01
1999	1,61	2,24	1,22	2,15	1,01	0,76	0,76	0,79	0,45	0,98
2000	1,37	2,49	1,16	2,07	0,88	0,75	0,70	0,71	0,45	0,85
2001	1,36	2,76	1,09	1,79	0,85	0,77	0,66	0,74	0,44	0,81

\* Рассчитано по: *Российский статистический ежегодник / Госкомстат России. М., 2003.*

<sup>1</sup> По материалам авторского исследования «Прогнозирование занятости в российской промышленности» (2003).

Тенденция последних лет — усиление диспропорций в оплате труда в различных отраслях.

Следуя предположению, сделанному ранее, о том, что высокий уровень зарплаты в отрасли коррелирует с уровнем занятости в данной отрасли, проверим эту гипотезу для временного отрезка 1995–2000 гг. (см. табл. 2).

Из таблицы коэффициентов корреляции видно, что отрицательная зависимость уровня занятости от начисленной заработной платы в отрасли характерна для таких отраслей, как электроэнергетика, топливная промышленность и промышленность. В электроэнергетике при росте уровня занятости за рассматриваемый период уровень начисленной заработной платы к средней по промышленности сократился. В топливной промышленности существенное сокращение уровня занятости (практически на 16%) сопровождалось не менее существенным увеличением показателя отношения начисленной заработной платы к средней по промышленности (рост которого составил 20% к базисному году). Отрицательные показатели корреляции также присущи отрасли химической промышленности, где практически все время, вплоть до последнего года, происходил рост уровня заработной платы, последний год рассматриваемого периода ознаменовался резким его снижением. При этом уровень занятости на протяжении всего периода постепенно снижался.

Наличие относительно высоких заработков в отдельных отраслях не ведет к увеличению уровня занятости, а, наоборот, свидетельствует о сокращении штата, особенно эта тенденция выражена в электроэнергетике. По всей видимости, штат на предприятиях этих отраслей уже сформирован и не нуждается в дополнительных работниках. Кроме того, существует тенденция к сокращению штата и наложению дополнительных обязанностей на оставшихся сотрудников. Возможно, происходит сокращение избыточных (наименее эффективных) работников и ликвидация убыточных предприятий, оставшиеся же работники (предприятия) более продуктивные, а следовательно, более высокооплачиваемые. Рост зарплаты, в свою очередь, побуждает работодателя к дальнейшему сокращению штатов (эффект замещения, внедрение новых трудосберегающих технологий).

Для всех остальных из рассматриваемых отраслей показатели корреляции положительные. Это легко видеть, рассматривая тенденции показателя отношения уровня заработной платы отрасли к средней по промышленности и уровня занятости. В отраслях черной и цветной металлургии, лесной промышленности, промышленности стройматериалов, легкой происходило однонаправленное изменение двух рассматриваемых показателей. Из приведенной группы отраслей с положительным коэффициентом корреляции лишь в одной, а именно в отрасли цветной металлургии был отмечен рост

*Таблица 2*

КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ НАЧИСЛЕННОЙ ЗАРАБОТНОЙ ПЛАТЫ ПО ОТРАСЛЯМ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И УРОВНЯ ЗАНЯТОСТИ В ЭТИХ ОТРАСЛЯХ ЗА ПЕРИОД 1995–2000 гг.

Год	Электроэнергетика	Топливая	Черная металлургия	Цветная металлургия	Химическая	Машиностроение	Лесная	Промышленность стройматериалов	Легкая	Пищевая
Показатель корреляции	-0,92	-0,46	0,35	0,25	-0,26	-0,09	0,87	0,85	0,86	0,01

уровня занятости и показателя отношения заработной платы отрасли к средней по промышленности, в остальных отраслях из этой группы оба показателя снижались.

Оценим двухфакторную модель (8) на данных по промышленности в целом. Здесь и далее в расчетах по модели в качестве показателя занятости будет использоваться среднегодовая численность промышленно-производственного персонала (ППП).

Численность ППП незначительно ниже общей численности занятых на предприятиях в силу того, что численность вспомогательного персонала на предприятиях по сравнению с общим масштабом занятости не так велика. При этом выбор показателя при расчетах модели не играет существенной роли, поскольку тренды этих показателей совпадают.

Уравнение регрессии для всей промышленности будет иметь вид:

$$\ln L = 3,604 + 0,219 \ln Q - 0,129 \ln t, \quad (10)$$

при  $R^2 = 0,98$

Здесь:  $\begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$  между объемом выпуска и уровнем занятости за период 1995–2000 гг. в целом по промышленности зависимость прямая и соответствует теоретическим утверждениям.

Отрицательный коэффициент при показателе времени указывает на обратную зависимость между уровнем занятости и временными изменениями, связанными с научно-техническим прогрессом (внедрением новых технологий).

Аналогичный регрессионный анализ можно провести по отдельным отраслям промышленности, применяя при этом трехфакторную модель, рассчитанную с учетом дополнительного фактора: отношения заработной платы отдельной отрасли к средней по рассматриваемому сектору экономики, в данном случае к средней по промышленности ( $W_i$ ).

Практическая направленность прогнозирования сводится к оптимизации структуры государственных расходов в социальной сфере, включающих в себя расходы на образование и переподготовку кадров, активные меры, проводимые государством на рынке труда, расходы на выплату пособий по безработице и др. Эти виды расходов составляют значительную долю госбюджета как на федеральном уровне, так и на уровне субъектов Федерации и местных бюджетов.

Представляется затруднительным сказать, насколько эти средства отвечают нынешней экономической ситуации, насколько они решают те проблемы, на финансирование решения которых направлены. Оценка величины финансирования социальной сферы из государственного бюджета осложняется еще и нецелесообразным расходованием выделяемых денежных средств. Так, например, спрос на некоторые специальности, такие как учителя школ по отдельным предметам, инженеры и др., сейчас сокращается, хотя это практически не отражается на количестве приема абитуриентов в вузы по данным специальностям. При этом государство ежегодно затрачивает огромные суммы на обучение будущих учителей школ и инженеров, которые по окончании учебных заведений большей частью останутся невостребованными на рынке труда, что означает нецелесообразность потраченных государственных средств на подготовку избытка специалистов. В этом случае возникают и другие проблемы, как, например, необходимость переподготовки кадров и, соответственно, необходимость дополнительного финансирования таких программ из бюджета.

Прогнозы спроса на труд, которые могут быть составлены с помощью предложенной методики не только для отраслей, но и для регионов, помогут обоснованию грамотной государственной политики на рынках труда, политике в сфере миграции и образования.